



# Kahramanmaraş Sütçü İmam University

## Journal of Engineering Sciences



Geliş Tarihi : 17.10.2023  
Kabul Tarihi : 16.11.2023

Received Date : 17.10.2023  
Accepted Date : 16.11.2023

### KOMPOZİT BİR SİLİNDİR GÖMLEĞİNDE İKİ BOYUTLU SICAKLIK DAĞILIMIN SAYISAL İNCELENMESİ

### NUMERICAL INVESTIGATION OF TWO DIMENSIONAL TEMPERATURE DISTRIBUTION OF A COMPOSITE CYLINDER LINER

Ali YILDIRIM<sup>1</sup>\* (ORCID: 0000-0001-5894-8986)  
Durmuş YARIMPABUÇ<sup>2</sup> (ORCID: 0000-0002-8763-1125)  
Kerimcan ÇELEBİ<sup>3</sup> (ORCID: 0000-0001-6294-0872)

<sup>1</sup> Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi, Osmaniye Meslek Yüksekokulu, Osmaniye, Türkiye,

<sup>2</sup> Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi, Matematik Bölümü, Osmaniye, Türkiye,

<sup>3</sup> Çukurova Üniversitesi, Ceyhan Mühendislik Fakültesi, Makine Mühendisliği Bölümü, Adana, Türkiye.

\*Sorumlu Yazar / Corresponding Author: Ali YILDIRIM, aliyildirim@osmaniye.edu.tr

#### ÖZET

Bu çalışmada sınırlarında sıcaklığın lineer değiştiği düşünülen alüminyum ve SiC'den oluşan kompozit bir silindir gömleğinde kararlı durumdaki iki boyutlu sıcaklık dağılımı pseudospektral Chebyshev yöntemi kullanılarak incelenmiştir. Sabit sıcaklık sınır koşulu altında iki boyutlu pseudospektral Chebyshev yöntemi kullanılarak elde edilen sayısal sonuçlar analitik çözümlerle karşılaştırılarak yöntemin doğruluğu gösterilmiştir. Silindir gömleğindeki sıcaklık dağılımlarının iki boyutlu ve üç boyutlu grafikleri verilmiş ve tartışılmıştır. Elde edilen sayısal sonuçlar, pseudospektral Chebyshev yönteminin bu tür problemlerin çözümlerinde alternatif olarak kullanılabileceği gösterilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Silindir gömleği, sıcaklık dağılımı, kompozit malzeme, pseudospektral Chebyshev yöntemi.

#### ABSTRACT

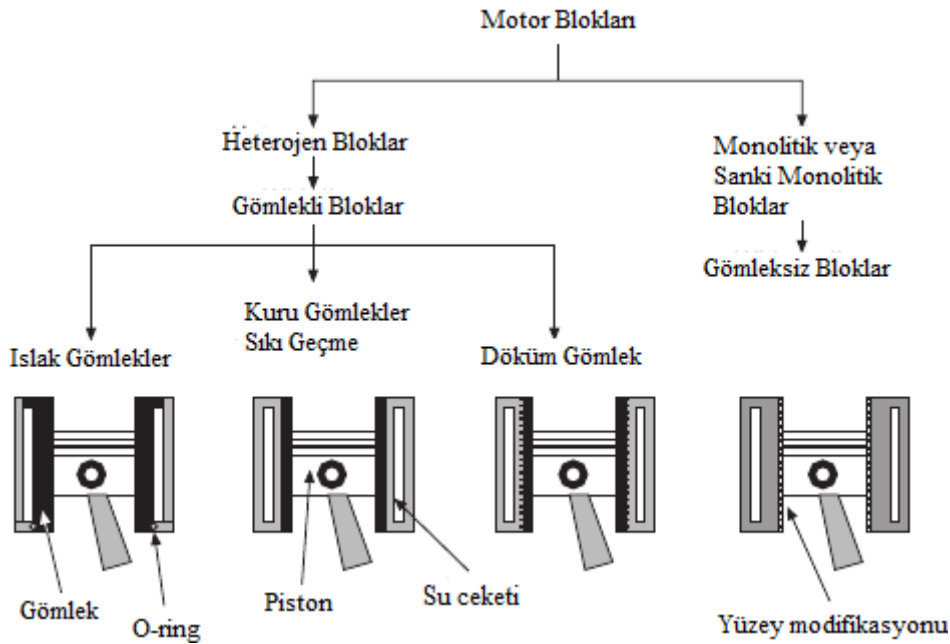
In this study, the steady-state two-dimensional temperature distribution in a composite cylinder liner consisting of aluminum and SiC, at the boundaries of which the temperature is thought to vary linearly, is examined using the pseudospectral Chebyshev method. The accuracy of the method has been demonstrated by comparing the numerical results obtained using the two-dimensional pseudospectral Chebyshev method under constant temperature boundary condition with the analytical solution. Two-dimensional and three-dimensional graphs of temperature distributions in the cylinder liner are given and discussed. The numerical results obtained show that the pseudospectral Chebyshev method can be used as an alternative in solving such problems.

**Keywords:** Cylinder liner, temperature distribution, composite material, pseudospectral Chebyshev method.

## GİRİŞ

İçten yanmalı motorlarda, piston ve segmandan kaynaklanan aşınmaya karşı dayanıklı bir yüzey oluşturan ve silindir içerisine yerleştirilen silindirik şeklindeki parça, silindir gömleği olarak tanımlanır. İçten yanmalı motorlarda kullanılan silindir blokları, monolitik, yarı-monolitik ve heterojen silindir blokları olarak sınıflandırılır. Gömleksiz silindir blokları olarak da tanımlanan monolitik silindir bloklarında silindir bloğu tek bir malzemeden yapılır. Yarı-monolitik silindir blokları tek malzemeden yapılmıştır, fakat bu bloklarda pistonun çalıştığı silindir deliği gözenekli Cr veya Nİ-SiC ile kaplanarak, veya çelik esaslı alaşımlar ile yüzeylerine plazma püskürtme yapılarak daha sert yüzeyler elde edilir. Heterojen silindir bloklarında ise genellikle silindir bloğu ile piston ve sekmanın hareketine kılavuzluk yapan silindir gömlekleri farklı malzemelerden yapılmıştır. Günümüzde herhangi bir arıza durumunda daha ucuz maliyetli çözümler sunması, silindir bloğuna göre aşınma direnci ve sürtünme özellikleri iyi olan malzemeler kullanılması gibi nedenlerden ötürü heterojen silindir blokları daha çok tercih edilmektedir (Heywood, 2008; Yamagata, 2005; MAHLE GmbH, 2016).

Heterojen silindir bloklarında kullanılan silindir gömlekleri direkt su ile temas edip etmemesine göre ıslak veya kuru gömlekler olarak sınıflandırılır. Kuru gömlekler silindir bloklarına sıkı geçme bir şekilde monte edilmiş olup silindir blokları ile temas halindedir. Islak gömlekler ise direkt soğutma suyu ile temas halinde olup ısı soğutma suyuna direkt olarak aktarılmaktadır. Islak silindir gömlekleri, silindir bloklarından destek almadan oluşan yüksek iç basınçlar ve ısıya dayanabilmesi için genellikle kuru gömleklere göre daha kalın olarak imal edilmelidir. Heterojen silindir bloklarında kullanılan bir diğer gömlek tipi ise dökme silindir gömleği olup silindir bloğunun dökümü esnasında silindir gömleğinin geleceği bölgeye dökülmesi ile elde edilir (Yamagata, 2005). Silindir bloklarının sınıflandırılması ve bu silindir bloklarında kullanılan silindir gömlek çeşitleri Yamagata (Yamagata, 2005) tarafından Şekil 1'deki gibi aşağıda verilmiştir.



Şekil 1. Motor Blokları ve Kullanılan Silindir Gömlek Çeşitleri (Yamagata, 2005)

Richardson (Richardson, 2000) içten yanmalı motorlarda toplam kaybın %50-60'ını termal kayıpların oluşturduğu ve motor performansını optimize ederken dikkate alınması gereken önemli faktörlerden birisi olduğu bildirilmiştir. Silindir duvar sıcaklığı yanma gazı sıcaklığı değerlerine ne kadar yakın olursa, termal kayıplar ideal olarak o kadar az olacaktır. Bununla birlikte silindir duvar sıcaklığının yüksek olmasının HC emisyonları üzerine olumlu bir etkisi varken, NOx emisyonunu artırıcı bir etkisi vardır. Benzinli motorlarda, silindir içi aşırı sıcaklık kontrolsüz patlamalara yani motorda vuruntuya sebep olmasından dolayı bu motorlarda parça sıcaklıklarını belli bir seviyenin altında tutulması gerekir. Ancak, aşırı soğutulmuş parçalar ise istenmeyen kompresör kaçaklarına sebebiyet vereceğinden, bu parçalarda sıcaklığın aşırı düşürülmemesi gerekir (Dehghani, 2013; Holger, 2001; Lapuerta, 2000;

Rakopoulos, 1998; Richardson, 2000; Wang, 2008). Bu tür nedenlerden dolayı silindir gömlek sıcaklığını belli bir seviyede tutmak ve bunu önceden belirleyebilmek önem arz etmektedir.

İçten yanmalı motorlarda kullanılan silindir gömleklerinde sıcaklık dağılımı genellikle bilgisayar destekli paket programlar yardımı ile elde edilmiştir. (Ertek, 2020; Gustof, 2008; Roy, 2020; Trung, 2021(a, b); Wang et al., 2012). Trung (Trung, 2021(a)) farklı motor devri ve motor yükündeki bir V-12 motorunun silindir gömleğindeki sıcaklık dağılımlarını, ANSYS Parametrik Tasarım Dili'nde (APDL) yazılmış sonlu elemanlar yöntemi kullanarak belirlemiştir. Elde edilen sonuçları deneysel sonuçlarla karşılaştırarak doğrulamış, testlerin sonuçları, teorik modelin oldukça güvenilir olduğunu ve en büyük bağıl hatanın %5,49 olduğunu göstermiştir. Turbo dizel bir motorun başlangıç fazında ıslak silindir gömleğindeki sıcaklık dağılımı Gustof ve Hornik (Gustof and Hornik, 2008) tarafından iki bölgeli yanma modeli ve sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilmiştir. İki bölgeli yanma modeli kullanılarak ısı yükleri belirlenmiş, sonlu elemanlar yöntemi ile gömlek üzerindeki sıcaklık dağılımları belirlenmiştir. Motor gömleğindeki sıcaklığın ilk 20 saniye içinde çok hızlı arttığı (ortalama olarak yaklaşık 3 K) daha sonra sıcaklık artışındaki hızın azaldığı ve 40. saniye sonunda maksimum sıcaklığın gömleğin üst kısmında 444 K olduğu tespit edilmiş ve bu süreden sonra sıcaklık artış hızının düştüğü belirlenmiştir. Uygulanan matematiksel modelin kullanılabilirliğinin mümkün olduğu sonucuna varılmıştır. Su soğutmalı 4 valfli, 4 zamanlı, turbo sarjlı benzinli bir motordaki ve soğutma suyu ceketindeki sıcaklık dağılımı Wang vd. (Wang et al., 2012) tarafından hesaplamalı akışkanlar dinamiğinin bir yazılımı olan Ansys Fluent kullanılarak elde edilmiştir. Motor ilk olarak Pro/E kullanılarak basitleştirilmiştir. Elde edilen verileri daha küçük parçalardan oluşan elemanlara ayırmak için ICEM kullanılmıştır. Elde edilen sonuçların doğrulanması için motorun belli bölgelerinden sıcaklık ölçümü alınmış, hesaplanan sıcaklık değerleri ile ölçümler arasındaki farkın makul ve silindirlerin birleştiği yerde maksimum olup en fazla 20 K olduğu gözlemlenmiştir. Sonuçların sonraki çalışmalarda ve soğutma suyu ceketlerinin optimizasyonunda kullanılabilmesi belirtilmiştir. Su ceketini, silindir gömleği iç kısmı ve yanma odasının üst kısmındaki sıcaklık dağılımları, üçüncü tip sınır koşulu ve bir boyutlu modele dayalı bir yazılım kullanılarak elde edilen sınır koşulları kullanılarak elde edilmiştir. Wang vd. (Wang et al., 2021) silindir gömlekleri etrafındaki soğutma suyu akışının, sıcaklık dağılımı ve termal deformasyon üzerindeki etkisini ortaya koymuşlardır. Bunun için bir dizel motorun simülasyon modeli ABAQUS paket programında geliştirilerek analizler yapılmıştır. Paket programlarla yapılan çalışmalara ek olarak Trung ve Trong (Trung and Trong, 2022), Hohenberg korelasyonunu kullanarak farklı alkol-dizel karışımları kullanılarak çalıştırılan bir dizel motorda silindir gömleklerinde meydana gelen ısı transferi ve sıcaklık dağılımlarını araştırmışlardır. Trung (Trung, 2021(b)), eski bir dizel motoru turboşarjlı bir motora dönüştürürken ısı transfer korelasyonunun silindir gömleklerindeki sıcaklık dağılımına etkisini incelemiştir. Woschini ve Hohenberg korelasyon denklemlerini kullanarak elde edilen sonuçları deneysel sonuçlar ile karşılaştırmışlardır.

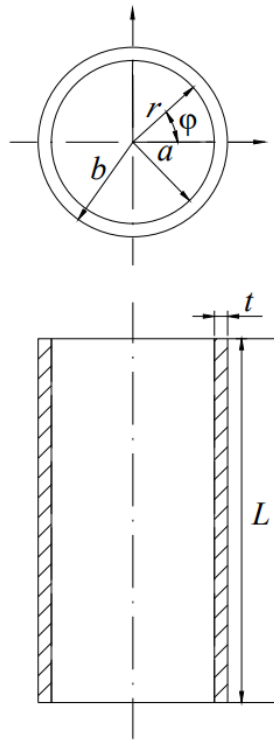
Sıkı geçme yöntemi ile silindir bloklarına yerleştirilen kuru silindir gömlekleri silindirik yapıdadır (Şekil 1). Kısa silindirlerde ısı gerilmeleri ilgili literatürde birçok çalışma mevcuttur. Shojaefard ve Najibi (Shojaefard and Najibi, 2014(a)) geçici düzgün olmayan aksel simetrik termal yüklere tabi tutulan içi boş iki boyutlu işlevsel olarak derecelendirilmiş kalın silindir için lineer olmayan geçici rejimde ısı transferi analizi geliştirmişlerdir. Elde edilen sıcaklık dağılımının doğruluğunu arttırmak için kademeli sonlu elemanlar yöntemi ve ikinci dereceden Lagrange şekil fonksiyonunu birlikte kullanmışlardır. Geçici termal yüklemeye koşullarına maruz kalan sonlu uzunluk ve sıcaklık ile değişen malzeme özelliklerine sahip kalın içi boş 2D fonksiyonel olarak derecelendirilmiş bir silindirin doğrusal olmayan geçici ısı iletimi analizi Shojaefard ve Najibi (Shojaefard and Najibi, 2014(b)) tarafından sunulmuştur. Sonlu uzunluğa sahip kalın içi boş 1D-FDM silindirin doğrusal olmayan geçici termal gerilme analizi, dereceli sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak Najibi, Alizadeh ve Ghazifard (Najibi, Alizadeh and Ghazifard, 2021) tarafından incelenmiştir. Can ve Keles (Can ve Keles, 2023) seramik ve metalin üssel olarak derecelendirildiği düşünülen bir silindir ve küredeki anlık sıcaklık dağılımı ve ısı akısını tepkisini Tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemini kullanarak sayısal olarak incelemiştir. Fourier olmayan ısı iletim teorisinin kullanıldığı bu çalışmada problem Laplace uzayında tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi kullanılarak çözülmüştür. Problemin ters Laplace dönüşümü Durbin yöntemi kullanılarak sayısal olarak gerçekleştirilmiştir. Homojensizlik parametrelerinin sıcaklık dağılımı, ısı akısı ve ısı dalga hızı üzerinde etkisi olduğu sonucu varmışlardır.

Bu çalışmada sınırlarında sıcaklığın doğrusal değiştiği varsayılan alüminyum ve SiC'den oluşan kompozit bir silindir gömleğinde kararlı durumdaki iki boyutlu sıcaklık dağılımı pseudospektral Chebyshev yöntemi kullanılarak incelenmiştir. Sabit sıcaklık sınır koşulu altında iki boyutlu pseudospektral Chebyshev yöntemi kullanılarak elde edilen sayısal sonuçlar analitik çözümlerle karşılaştırılarak yöntemin doğruluğu gösterilmiştir. Silindir gömleğindeki sıcaklık dağılımlarının iki boyutlu ve üç boyutlu grafikleri verilmiş ve tartışılmıştır. Elde edilen sayısal sonuçlar,

pseudospektral Chebyshev yönteminin bu tür problemlerin çözümlerinde alternatif olarak kullanılabileceği gösterilmiştir.

## MATERYAL VE YÖNTEM

SiC takviyelerin Al matris içerisinde homojen olarak dağıldığı, aksel simetrik ısı yüküne maruz kalan bir silindir gömleği (Şekil 2) ele alalım. Isıl dengeye ulaştığı düşünülen silindir gömleğinin iç ve dış kısmında  $z$  ekseninde boyunca ve gömleğin alt ve üst kısmında  $r$  ekseninde boyunca sıcaklıkların sabit olduğu varsayılmıştır. Ayrıca silindir gömleğinde herhangi bir iç ısı üretimi ya da tüketimi olmayıp sıcaklık değişimi ile mekanik ve ısıl özelliklerinin değişmediği varsayılmıştır. Şekil 2’de verilen silindir gömleğinde radyal yönde herhangi bir noktadaki yarıçap “ $r$ ” ile temsil edilmekte olup, “ $a$ ” iç çapı “ $b$ ” ise silindir gömleğinin dış çapını temsil etmektedir. “ $t$ ” silindir gömleğinin kalınlığını ifade ederken “ $z$ ” ise silindir gömleğinin herhangi bir noktasındaki aksel mesafeyi göstermektedir. Ayrıca silindir gömleğinin üst yüzeyi ile alt yüzeyi arasındaki mesafe “ $L$ ” ile ifade edilmiştir. Bu çalışmada kullanılan silindir gömleğinin boyutları iç ve dış çapı sırası ile 74 ve 86 mm boyu ise 165 mm olacak şekilde Ertek’in çalışmasından yararlanmıştır (Ertek, 2020).



Şekil 2. Silindir Gömleği

### Halpin-Tsai Malzeme Modeli

Farklı mekanik ve ısıl özelliklere sahip en az iki malzemenin birbiri içinde çözünmeden karışması sonucu oluşan kompozit malzemelerdeki mekanik ve ısıl özellikleri belirlemek için bir çok mikromekanik model olup (Vignoli et al., 2019), parçacık takviyeli kompozitler ve parçacık takviyeli kompozitin bir uygulaması olan Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemeler (FGM)’ler için Halpin-Tsai oldukça iyi sonuçlar vermektedir (Arslan, Mack and Apatay, 2021). Halpin-Tsai parçacık takviyeli kompozit malzemelerde termal iletkenlik, elastisite modülü, lineer termal genişleme ve Poisson oranı gibi malzeme özelliklerinin belirlenmesinde kullanılan bir yöntem olup, deneysel verilerden elde edilen değerlerin birleştirilmesi ve oluşturulan eğriye uydurulması ile elde edilen ampirik bir malzeme modelidir (Halpin, 1969; Halpin, 1992; Gibson R.F. 2016;). Halpin-Tsai modeline göre malzeme özelliklerinin belirlenmesinde kullanılan formül

$$\frac{p}{p_m} = \frac{1 + \xi \eta V_f}{1 - \eta V_f} \quad (1)$$

şeklinde olup,  $\eta$  ve  $\xi$  aşağıdaki tanımlanmaktadır.

$$\eta = \frac{p_f - 1}{\frac{p_m}{p_f + \xi}}, \quad \xi = 2(l/m) \quad (2)$$

Burada  $p$  parçacık takviyeli kompozitte herhangi bir malzeme özelliğini,  $p_f$  fiberin özelliğini ve  $p_m$  matris malzemesinin özelliğini ifade etmektedir.  $\xi$  fiber geometrisine bağlı bir parametre olup  $l$  fiberin uzunluğunu  $m$  ise fiberin genişliğini ifade eder.  $V_f$  fiberin hacimsel oranını ifade ederken  $V_m$  matrisin hacimsel oranını ifade etmektedir. Fiberin ve matrisin hacimsel oranları ise aşağıdaki gibi tanımlanmıştır (Shariyat, 2012; Eker vd., 2021).

$$V_f = \left(\frac{r-a}{b-a}\right)^n, \quad V_m = 1 - V_f \quad (3)$$

$n$  hacimsel oran indeksi olup  $n \geq 0$  dır. Hacim oranı indeksi, fonksiyonel olarak derecelendirilmiş silindirik parçaların iç ve dış duvarlarında kullanılan malzeme miktarının yoğunluğunu kontrol etmek için kullanılan bir parametredir. Hacim oranı indeksi arttıkça iç duvarda kullanılan malzeme oranı artmakta, azaldıkça dış duvarda kullanılan malzeme oranı artmaktadır.

### Sıcaklık Dağılımın Analitik İncelenmesi

Isıl dengeye ulaşmış, iç ısı üretimin ve tüketiminin olmadığı, çevresel olarak simetrik olan silindirik yapıdaki bir silindir gömleğindeki enerji denge denklemi aşağıdaki gibidir (Arpacı, 1966; Carslaw, 1959; Jacob, 1949).

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) = 0 \quad (4)$$

Bu denklemde geçen “ $k$ ” ısı iletim katsayısını göstermektedir. Silindir gömleğinde metal matris olarak kullanılan alüminyumun ısı iletkenlik katsayısı 222 W/(mK) iken seramik takviyenin ısı iletkenlik katsayısı 39 W/(mK) dir (Callister, 2009). Bu çalışmada analitik çözüm yapılırken silindir gömleğinin iç ve dış kısmında  $z$  eksenini boyunca ve gömleğin alt ve üst kısmında  $r$  eksenini boyunca sıcaklıkların sabit olduğu varsayılmıştır. Bu sınır koşulları literatürde bulunan çalışmadaki (Ertek, 2020) sınır koşullarının ortalaması alınarak aşağıdaki gibi elde edilmiş ve bu sınır koşulları birinci sınır koşulu durumu olarak tarif edilmiştir. Sıcaklığın sınır koşullarında lineer olarak değiştiği durum ise ikinci sınır koşulu durumu olarak tarif edilmiştir. İkinci sınır koşulunda silindirin uç noktalarındaki değerler yine literatürden alınmıştır (Ertek, 2020). Buna göre birinci sınır koşulu durumu

$$T(r, 0) = 418 \text{ (K)}, \quad T(r, l) = 375 \text{ (K)} \quad (5)$$

$$T(a, z) = 423 \text{ (K)}, \quad T(b, z) = 370 \text{ (K)}$$

şeklinde alınırken ikinci sınır koşulu durumu ise

$$T(r, 0) = 453 + \frac{70(r-a)}{a-b} \text{ (K)}, \quad T(r, l) = 393 + \frac{35(r-a)}{a-b} \text{ (K)} \quad (6)$$

$$T(a, z) = 453 - \frac{60z}{L} \text{ (K)}, \quad T(b, z) = 383 - \frac{30z}{L} \text{ (K)}$$

şeklinde alınmıştır. Metal matris olarak alüminyum, seramik takviye olarak ise SiC'ün kullanıldığı silindirde, malzeme özellikleri, seramik ve metal malzemelerin özellikleri kullanılarak Halpin-Tsai yöntemi ile elde edilecektir. (4) numaralı diferansiyel denklemdeki türevler alınıp denklem düzenlenirse enerji denge denklemi

$$k \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{k}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (7)$$

şeklinde elde edilir. (7) numaralı denklemde verilen diferansiyel denklem homojen olmasına rağmen (5) numaralı eşitlikte verilen uzay değişkenlerinde homojen değildir. Bu sınır şartlarından herhangi bir tanesi homojen sınır şartına dönüştürülerek diferansiyel denklem, değişkenlere ayırma yöntemi kullanılarak çözülebilir. Bu nedenle aranan  $T(r, z)$  sıcaklık değeri aşağıdaki şekilde iki parçaya ayrılır.

$$T(r, z) = \theta_1(r, z) + \theta_2(z) \quad (8)$$

Bu sıcaklık ifadesi (7) numaralı diferansiyel denklemde yerine yazılırsa

$$k \frac{d^2 \theta_2}{dz^2} = 0 \quad (9)$$

$$\theta_2(0) = 418 \text{ K}, \quad \theta_2(l) = 375 \text{ K} \quad (10)$$

şeklinde bir adi diferansiyel denklem ile

$$k \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial r^2} + \frac{k}{r} \frac{\partial \theta_1}{\partial r} + k \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial z^2} = 0 \quad (11)$$

$$\theta_1(r, 0) = 0, \quad \theta_1(r, l) = 0 \quad (12a)$$

$$\theta_1(a, z) = 423 - \theta_2(z), \quad \theta_1(b, z) = 370 - \theta_2(z) \quad (12b)$$

şeklinde homojen bir kısmi diferansiyel denkleme elde edilebilir. Adi diferansiyel denklemin (9) sınır koşulları (10) altındaki çözümü

$$\theta_2(z) = -\frac{43}{l}z + 418 \quad (13)$$

şeklinde elde edilir. Kısmi diferansiyel denklem (11) ve bir yöndeki sınır koşulları (12) homojen olduğundan  $\theta_1$  ifadesi

$$\theta_1(r, z) = R(r)Z(z) \quad (14)$$

şeklinde değişkenlerine ayrılabilir. Bu ifade (14), kısmi diferansiyel denklemde (11) yerine yazılırsa,

$$\frac{1}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{Rr} \frac{dR}{dr} = -\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} \quad (15)$$

gibi sol tarafı  $r$  sağ tarafı ise  $z$  bağımsız değişkenine bağlı bir denklem elde edilir. Bu nedenle bu ifadenin sonucu bir sabit sayıya eşit olmalıdır. Sabit ifade  $\lambda^2$  olarak seçilirse

$$\frac{1}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{Rr} \frac{dR}{dr} - \lambda^2 = 0 \quad (16)$$

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} + \lambda^2 = 0 \quad (17)$$

Adi diferansiyel denklemleri elde edilir. Değişken katsayılı lineer diferansiyel denklem olan (16) numaralı denklem Bessel fonksiyonuna indirgenmesi Kraus vd. (Kraus, Aziz and Welty, 2001) tarafından açıklanmış ve bu denklemin çözümü Bessel fonksiyonu formunda aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$R(r) = D_1 I_0(\lambda r) + D_2 K_0(\lambda r) \quad (18)$$

(18) numaralı denklemde geçen  $I_0$  sıfırıncı dereceden birinci tip modifiye Bessel fonksiyonunu  $K_0$  ise sıfırıncı dereceden ikinci tip modifiye Bessel fonksiyonunu ifade etmektedir. (17) numaralı denklem sabit katsayılı lineer bir diferansiyel denklem olup çözümü aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$Z(z) = E_1 \cos(\lambda z) + E_2 \sin(\lambda z) \quad (19)$$

Homojen sınır koşulları (12a) kullanılarak,  $E_1$  ve  $\lambda$  sabitleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$E_1 = 0, \quad \lambda = \frac{n\pi}{l}, \quad n = 0, \mp 1, \mp 2, \dots \quad (20)$$

$R(r)$  ve  $Z(z)$  fonksiyonları,  $\theta_1$  fonksiyonunda (14) yerine yazılırsa,

$$\theta_1(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ A_n I_0 \left( \frac{n\pi}{l} r \right) + B_n K_0 \left( \frac{n\pi}{l} r \right) \right] \sin \left( \frac{n\pi}{l} z \right) \quad (21)$$

elde edilir. (12b) numaralı eşitlikte geçen  $r$  yönündeki sınır koşulları kullanılarak,  $A_n$  ve  $B_n$  sabitleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$A_n = -\frac{1}{n\pi} \left( \frac{K_0 \left( \frac{n\pi}{l} b \right) (10 - 96(-1)^n) - K_0 \left( \frac{n\pi}{l} a \right) (10(-1)^n - 96)}{I_0 \left( \frac{n\pi}{l} b \right) K_0 \left( \frac{n\pi}{l} a \right) - I_0 \left( \frac{n\pi}{l} a \right) K_0 \left( \frac{n\pi}{l} b \right)} \right) \quad (22)$$

$$B_n = -\frac{1}{n\pi} \left( \frac{I_0 \left( \frac{n\pi}{l} a \right) (10(-1)^n - 96) - I_0 \left( \frac{n\pi}{l} b \right) (10 - 96(-1)^n)}{I_0 \left( \frac{n\pi}{l} b \right) K_0 \left( \frac{n\pi}{l} a \right) - I_0 \left( \frac{n\pi}{l} a \right) K_0 \left( \frac{n\pi}{l} b \right)} \right) \quad (23)$$

aranan sıcaklık fonksiyonu (8)

$$T(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ A_n I_0 \left( \frac{n\pi}{l} r \right) + B_n K_0 \left( \frac{n\pi}{l} r \right) \right] \sin \left( \frac{n\pi}{l} z \right) - \frac{43}{l} z + 418 \quad (24)$$

olarak bulunur.

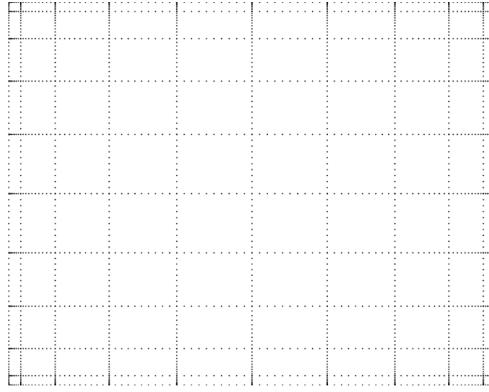
### ***Pseudospektral Chebyshev Yöntemi ve Sıcaklık Dağılımın Sayısal İncelenmesi***

Pseudospektral Chebyshev yöntemi, bir veya birden fazla bağımsız değişkene göre elde edilmiş diferansiyel denklemi doğrusal veya doğrusal olmayan denklem sistemine dönüştüren bir yöntemdir (Gottlieb, 1981; Trefethen, 2000; Bazan, 2008). Daha az sayıda nokta kullanarak yüksek hassasiyet elde etme prensibine dayanan bu yöntemdeki örgü noktaları, sınıra yakın bölgelerde orta noktalara göre daha sık olacak şekilde seçilir. Böylece sınır değer problemlerinin çözümünde diğer yöntemlere göre daha yüksek hassasiyet verir. Bu tanıma uyan, yani sınır noktalarında daha fazla örgü noktalarına sahip olan Chebyshev noktaları (Gauss- Lobatta noktaları)

$$r_j = \cos \left( \frac{j\pi}{N} \right), \quad j = 0, 1, 2, 3 \dots N \quad (25)$$

kullanılarak birinci dereceden Chebyshev diferansiyel matrisi  $D$  hesaplanabilir. Elde edilen Chebyshev diferansiyel matrisi ve vektörün sonlu sayıda çarpımı ile vektörün türevleri  $T'(r_j) = (DT)_j, T''(r_j) = (D^2T)_j \dots$  yüksek hassasiyetle elde edilir. Burada  $T = [T_0 \ T_1 \ \dots \ T_n]^T$ ,  $r_j$  noktalarındaki vektör verileridir. Chebyshev türev matrisinin hesaplama prosedürü ve m-dosyası Trefethen (Trefethen, 2000) tarafından verilmiş, bölüntüleme noktaları  $r_j$  sağdan sola numaralanmış ve  $[-1, 1]$  aralığında tanımlanmıştır. Matlab m-dosyasında küçük bir revizyonla herhangi bir aralıktaki  $D$  türevleme matrisi hesaplanabilir.

Tek boyutlu problemlerin çözümünde kullanılacak yukarıdaki prosedüre ek olarak iki boyutlu problemlerin çözümünde de Chebyshev türevleme matrisi  $D$  istenilen yönde elde edilerek o yöndeki vektörlerin türevleri yüksek hassasiyet ile elde edilebilir. Kısmi diferansiyel denklemlerle sınır değer problemlerinin çözümünde Pseudospektral Chebyshev yöntemini kullanabilmek için Chebyshev türevleme matrisi  $D$ 'nin her bağımsız değişken için ayrı ayrı oluşturulması gerekmektedir. Bu şekilde oluşturulan örgü sistemine tensörlü çarpım örgüsü adı verilmektedir (Trefethen, 2000).



Şekil 3. İki Boyutlu Tensör Örgü Noktalarının Dağılımı

Bu çalışmada sunulan pseudospektral Chebyshev yönteminde, Gauss-Lobatto noktaları kullanılmaktadır. Gauss-Lobatto noktaları kullanılarak oluşturulan örgü noktalarının dağılımı bir boyutlu problemlerde, eşit aralıklı dağılıma göre  $2/\pi$  kat orta bölgelere yoğunlaşmış olup, bu durum  $d$  boyut için  $(2/\pi)d$  kat olmaktadır. Bundan dolayı örgü noktalarının büyük çoğunluğunun sınıra yakın konumlandırılması nedeni ile sınır değer problemlerinin çözümünde eşit aralıklı dağılıma göre daha hassas sonuçlar üretmektedir (Trefethen, 2000).

Spektral örgü noktalarında Chebyshev türevleme matrislerini kullanılarak bağımsız değişkenlere göre türev matrislerini elde edebilmek için doğrusal cebir konularından olan tensörel çarpım (Knocker çarpım) kullanılması gerekir (Trefethen, 2000). Sistemin sıcaklık dağılımını modelleyen homojen kısmi diferansiyel denklem (7)

$$L[T] = kT_{rr} + \frac{k}{r}T_r + kT_{zz} \quad (26)$$

ele alınsın. Bu denklem  $r$  ve  $z$  yönünde birbirinden bağımsız şekilde oluşturulan Chebyshev türevleme matrisi " $D$ " ve Knocker çarpım kullanılarak ayrıklaştırılır ve sağ taraf denklemini ile lineer operatör " $L$ " kullanılarak bilinmeyen ve aranan ifade olan " $T$ " elde edilir.

$$T = [T_{rz}] = [T(r_i, z_j)], \quad 0 \leq i \leq N, \quad 0 \leq j \leq M$$

şeklinde olsun. (26) numaralı eşitlikte geçen " $T_r$ " ve " $T_{rr}$ "  $T$ 'nin  $r$  yönündeki birinci ve ikinci türevlerini ifade ederken " $T_{zz}$ "  $z$  yönündeki ikinci derece türevlerini ifade etmektedir. " $D_r$  ve  $D_z$ " sırası ile  $r$  ve  $z$  yönünde elde edilmiş olan ve birinci derece türeve karşılık gelen Chebyshev türevleme matrisleri olsun. Buna göre  $r$  ve  $z$  yönündeki ikinci derece türeve karşılık gelen Chebyshev türevleme matrisleri sırası ile  $D_r^2 = D_r D_r$  ve  $D_z^2 = D_z D_z$  olmak üzere çözüm matrisindeki  $r$  yönündeki ikinci derece türevleme matrisi (Trefethen, 2000)

$$D_r^2 T = D_r^2 \begin{bmatrix} T_{:,0} & \dots & T_{:,z} \\ \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_r^2 T_{:,0} & \dots & D_r^2 T_{:,z} \\ \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix} \quad (27)$$

şeklinde olup  $z$  yönündeki türevleme matrisi ise

$$D_z^2 T^T = D_z^2 \begin{bmatrix} T^T_{:,0} & \dots & T^T_{:,r} \\ \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_z^2 T^T_{:,0} & \dots & D_z^2 T^T_{:,r} \\ \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix} \quad (28)$$

şeklinde elde edilir. Herhangi iki matris çarpımının transpozu, bu matrislerin transpozlarının ters sıradan çarpımına eşittir. Buna göre

$$(D_z^2 T^T)^T = T(D_z^2)^T$$

olarak yazılabilir.  $A$  ve  $B$ ,  $M \times M$  ve  $N \times N$  boyutunda herhangi iki farklı kare matris olmak üzere  $vec(AYB) = (B^T \otimes A)vec(Y)$  özelliği kullanılarak  $r$  yönü için



$$\text{vec}(D_r T) = \text{vec}(D_r T I_z) = (I_z \otimes D_r) \text{vec}(T) \quad (29)$$

$$\text{vec}(D_r^2 T) = \text{vec}(D_r^2 T I_z) = (I_z \otimes D_r^2) \text{vec}(T) \quad (30)$$

ve z yönü içinde

$$\text{vec}(T (D_z^2)^T) = \text{vec}(I_r T (D_z^2)^T) = (D_z^2 \otimes I_r) \text{vec}(T) \quad (31)$$

elde edilir. (29-31) denklemlerinde geçen " $I_r$ " ve " $I_z$ " sırası ile  $r$  ve  $z$  yönündeki birim matrisleri ifade etmektedir. Buna göre (26) numaralı denklemin sağ tarafı

$$\text{vec}(D_r^2 T + \frac{1}{r} D_r T + T (D_z^2)^T) = \left( I_z \otimes D_r^2 + \left( I_z \otimes \frac{1}{r} \right) (I_z \otimes D_r) + D_z^2 \otimes I_r \right) \text{vec}(T) \quad (32)$$

şeklinde elde edilir. Böylece (7) numaralı denklemin doğrusal matris operatörü aşağıdaki gibi elde edilir.

$$L = k \left( I_z \otimes D_r^2 + \left( I_z \otimes \frac{1}{r} \right) (I_z \otimes D_r) + D_z^2 \otimes I_r \right) \quad (33)$$

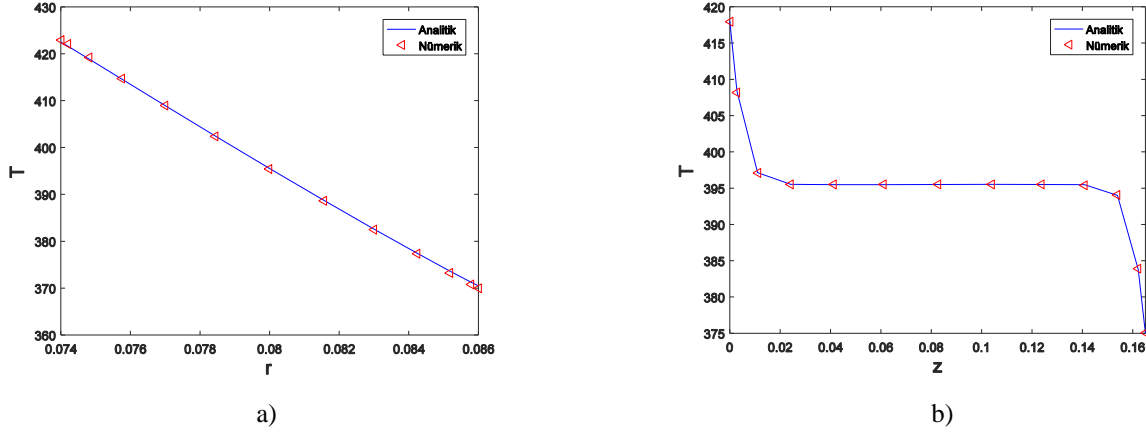
İkinci dereceden sıcaklığa bağlı kısmi diferansiyel denklem (7) Klocker çarpım ve Chebyshev türevleme matrisleri kullanılarak aşağıdaki gibi ayrıştırılabilir.

$$LT = 0 \quad (34)$$

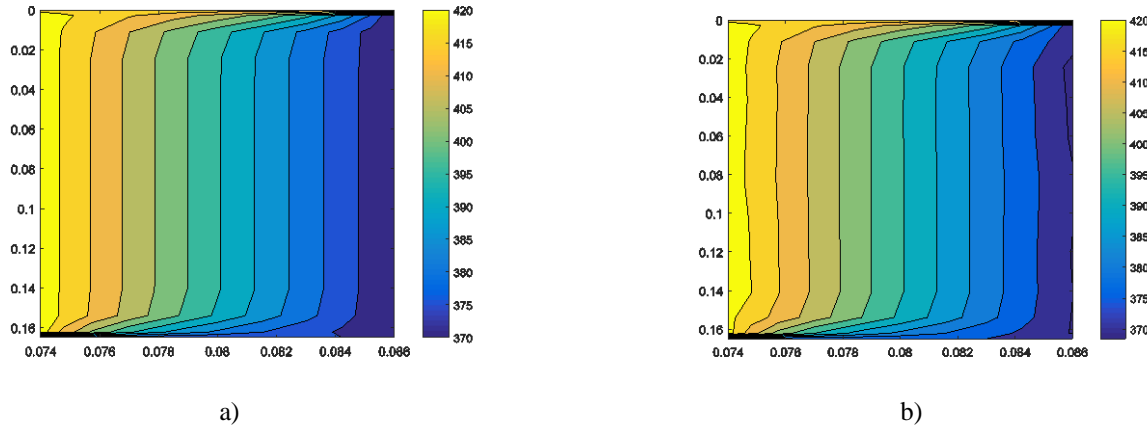
Bu sistem, lineer matris operatörü (33) kullanılarak sınır koşullarında (6) çözümlerse, ikinci sınır koşulu için aşikar olmayan çözümler elde edilmiş olur.

## BULGULAR VE TARTIŞMA

SiC takviyelerin Al matris içerisinde homojen olarak dağıldığı, eksenel simetrik ısı yüklerine maruz kalan ve ısı dengeye ulaştığı düşünülen kompozit bir silindir gömleğindeki sıcaklık dağılımı pseudospektral Chebyshev yöntemi kullanılarak sayısal olarak incelenmiştir. Silindir gömleğinde herhangi bir iç ısı üretimi ya da tüketimi olmayıp sıcaklık değişimi ile mekanik ve ısı özelliklerinin değişmediği varsayılmıştır. Sabit sıcaklık sınır koşulu altında iki boyutlu pseudospektral Chebyshev yöntemi kullanılarak elde edilen sayısal sonuçlar  $r$  ve  $z$  eksenin orta noktalarında analitik çözümlerle karşılaştırılarak yöntemin doğruluğu Şekil 4'de gösterilmiştir. Şekil 5'de ise silindir gömleğin tamamındaki sıcaklık dağılımları hem sayısal hem de analitik olarak sunulmuştur. Hem  $r$  eksenini hem de  $z$  eksenini boyunca 12 nokta kullanılarak elde edilen analitik ve sayısal sonuçlar arasındaki en büyük bağıl hata  $r$  ve  $z$  eksenini için sırası ile %0.1264 ve %0.05 dir. Şekil 5'de verilen analitik ve sayısal sonuçlar incelendiğinde eksenel yön boyunca sıcaklık dağılımını sınırlara yakın bölgelerde değişiyor olsa da eksenel yönün büyük bir kısmında sıcaklık değişimi olmamaktadır. Bu durum analitik çözümün elde edilmesi için kullanılan sınır koşulları ile ilgilidir. Daha karmaşık veya daha gerçekçi sınır koşulları sayısal çözüm kullanılarak elde edilebilir.

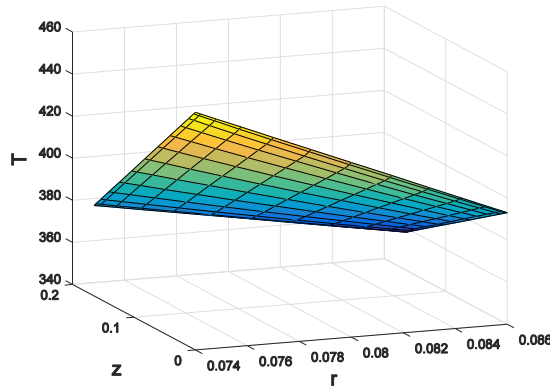


Şekil 4.  $z$  Eksenine Orta Noktasında  $r$  Eksenine Boyunca (a) ve  $r$  Eksenine Orta Noktasındaki  $z$  Eksenine Boyunca (b) Sıcaklık Dağılımı

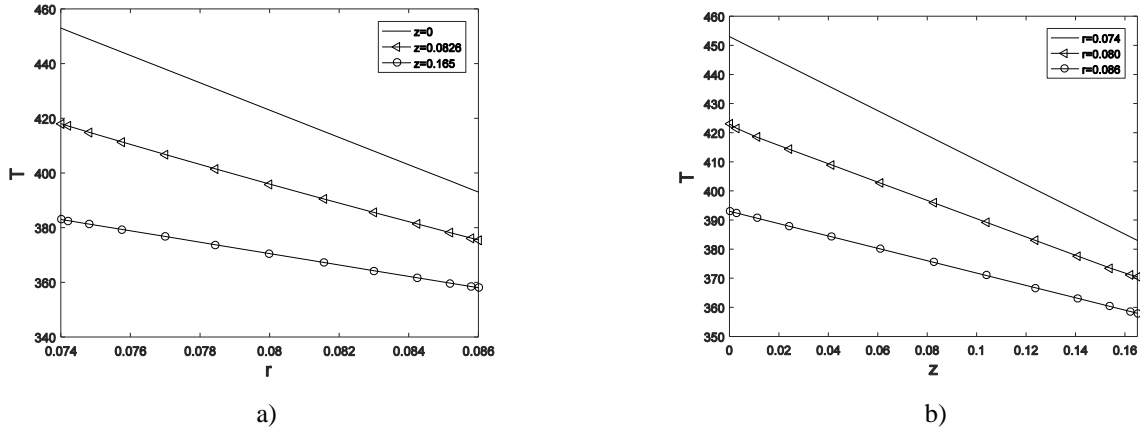


Şekil 5. Silindir Gömleği Sıcaklık Dağılımı Analitik Çözüm (a) ve Sayısal Çözüm (b)

İkinci tip sınır koşulunda elde edilen sıcaklık dağılımı ise Şekil 6'da üç boyutlu grafik olarak sunulmuştur. Farklı  $r$  ve  $z$  noktalarında  $r$  ve  $z$  eksenine boyunca sıcaklık dağılımları Şekil 7'de verilmiştir. Şekil 7a ve 7b incelendiğinde silindir gömleğindeki  $r$  eksenine boyunca sıcaklık farkı silindirin üst kısmından alt kısmına gidildikçe,  $z$  eksenine boyunca da sıcaklık farkı silindirin iç kısmından dış kısmına gidildikçe azaldığı gözlemlenmiştir.



Şekil 6. Silindir Gömleğindeki Sıcaklık Dağılımı (İkinci Sınır Koşulu)



Şekil 7. Silindir Gömleğinde Verilen Bazı Noktalardaki  $r$  Eksenini (a) ve  $z$  Eksenini (b) Boyunca Sıcaklık Dağılımı

## SONUÇ

Bu makalede, SiC'ün takviye Al'nın ise matris olarak kullanıldığı kompozit bir silindir gömleğindeki sıcaklık dağılımı sabit sıcaklık sınır şartı altında analitik ve numerik olarak incelenmiştir. Seramik takviyenin metal matris içinde homojen olarak dağılması, silindir gömleğinde kararlı duruma ulaşılması ve sabit sıcaklık sınır koşulları alınması nedeni ile kompozit malzemenin ısı iletim katsayısı değerinin sıcaklık dağılımı üzerine etkisi yoktur. Buna rağmen problemin geçici rejimde incelenmesi ya da karışık tip sınır koşullarında incelenmesi durumunda ısı iletimlik değeri sıcaklık dağılımı üzerine etkisi olmaktadır. Bu sebeple ısı iletim katsayısının belirlenebilmesi için Halpin-Tsai malzeme modeli bu makalede anlatılmıştır. Bu çalışma neticesinde

- Pseudospektral Chebyshev yönteminin, kompozit silindir gömleklerinde sıcaklık dağılımının belirlenmesinde alternatif olarak kullanılabilmesi gösterilmiştir. Daha karmaşık veya gerçeğe yakın sınır koşullarının kullanıldığı problemlerin çözümünde hızlı ve etkili olduğu kanaatine varılmıştır.
- Sonlu uzunlukta Fourier Serisi ile elde edilen analitik çözümlerde bir miktar kabul edilebilir hata oluşur. Bu koşullar altında Pseudospektral Chebyshev yöntemi ile elde edilen sonuçların maksimum bağıl hatası %0.1264 mertebesinde dir.

## KAYNAKLAR

Arpaci, V. S. (1966). *Conduction Heat Transfer*, Addison-Wesley, Reading, MA.

Arslan, E., Mack, W., & Apatay, T. (2021), Thermo-mechanically loaded steel/aluminum functionally graded spherical containers and pressure vessels. *Int. J. Press. Vessels Pip.*, 191, 104334. <https://doi.org/10.1016/j.ijpvp.2021.104334>

Bazan, F.S.V. (2008). Chebyshev Pseudospectral Method for Computing Numerical Solution of Convection-Diffusion Equation. *Applied Mathematics and Computation*, 200(2), 537-546. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2007.11.026>

Bi, Y., Wang, P., Xiang, R., Wen, J., Lei, J., Shen, L., & Xin, Q. (2021). Numerical investigation on the operating characteristics of the cylinder liners of a turbocharged diesel engine. *Sādhanā*, 46, 1-14. <https://doi.org/10.1007/s12046-021-01679-0>

Callister Jr, W. D., & Rethwisch, D. G. (2009). *Material science and engineering an introduction (8th edition)*. John Wiley & Sons.

Can, N., & Keles, I. (2023). A practical jointed approach to transient hyperbolic heat conduction of FGM cylinders and spheres. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 37(3), 1223-1231. <https://doi.org/10.1007/s12206-023-0209-z>

Carslaw, H. S., & Jaeger, J. C. (1959). *Conduction of Heat in Solids, (2nd edition)*. Oxford University Press, New York.

- Firoozabadi, M. D., Shahbakhti, M., Koch, C.R., & Jazayeri, S.A. (2013). Thermodynamic control-oriented modeling of cycle-to-cycle exhaust gas temperature in an HCCI engine. *Applied Energy*, 110, 236–243. <https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2013.04.055>
- Eker, M., Yarımpabuç, D., Yıldırım, A., & Celebi K. (2021). Elastic Solutions Based On The Mori–Tanaka Scheme For Pressurized Functionally Graded Cylinder. *Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics* 19(4), 24–37. <https://doi.org/10.17512/jamcm.2020.4.05>
- Ertek, C., & Civelek, F. (2020). Comparison of functionally graded and ungraded cylinder liners with finite element analysis. *Cumhuriyet Science Journal*, 41(2), 506–520. <http://dx.doi.org/10.17776/cs.j.632197>
- Gibson, R.F. (2016). *Principles of composite material mechanics (Fourth Edition)*. CRC Press, Boca Raton,
- Gottlieb, D. (1981). The Stability of Pseudospectral-Chebyshev Methods, *Mathematics of Computation*, 36(153), 107-118. ISSN 1088-6842 (online) ISSN 0025-5718 (print)
- Gustof, P., & Hornik, A. (2008). Determination of the temperature distribution in the wet cylinder sleeve in turbo Diesel engine. *Journal of Achievements in Materials and Manufacturing Engineering*, 27(2), 159-162. [http://jamme.acmsse.h2.pl/papers\\_vol27\\_2/27211.pdf](http://jamme.acmsse.h2.pl/papers_vol27_2/27211.pdf)
- Halpin, J.C. (1969). Stiffness and expansion estimates for oriented short fiber composites. *Journal of Composite Materials*, 3(4), 732-734. <https://doi.org/10.1177/002199836900300419>
- Heywood, J.B. (2008). *Internal combustion engine Fundamentals (Second Edition)*. McGraw-Hill International Editions, London.
- Halpin, J.C. (1992). *Primer on Composite Materials Analysis Second Edition, Revised*, CRC Press, Boca Raton, Florida. <https://doi.org/10.1201/9780203742235>
- Holger, P., Worret, R., & Spicher, U. (2001, July). Numerical analyses of the combustion process in spark ignition engine. In *The fifth international symposium on diagnostics and modelling of combustion in internal combustion engines*, Nagaya.
- Jacob, M. (1949). *Heat Transfer*, John Wiley and Sons, New York.
- Kraus, A.D., Aziz, A., & Welty, J.R. (2001). *Extended Surface Heat Transfer*. John 155 Wiley and Sons, New York.
- Lapuerta, M., Armas, O., & Bermúdez, V. (2000). Sensitivity of diesel engine thermodynamic cycle calculation to measurement errors and estimated parameters. *Applied Thermal Engineering*, 20(9), 843-861. [https://doi.org/10.1016/S1359-4311\(99\)00069-1](https://doi.org/10.1016/S1359-4311(99)00069-1)
- MAHLE GmbH, (2016.). *Cylinder Components Properties, applications, materials (Second Edition)*. Springer, Stuttgart, Germany.
- Najibi, A., Alizadeh, P., & Ghazifard, P. (2021). Transient thermal stress analysis for a short thick hollow FGM cylinder with nonlinear temperature-dependent material properties. *Journal of Thermal Analysis and Calorimetry*, 1-12. <https://doi.org/10.1007/s10973-020-10442-2>
- Rakopoulos, C. D., & Mavropoulos, G. C. (1998). Components heat transfer studies in a low heat rejection DI diesel engine using a hybrid thermostructural finite element model. *Applied thermal engineering*, 18(5), 301-316. [https://doi.org/10.1016/S1359-4311\(97\)00055-0](https://doi.org/10.1016/S1359-4311(97)00055-0)
- Roy, S., Ganesh, N., Kumarasamy, A., & Viswanathan, P. (2020). Thermomechanical Analysis of a Cylindrical Liner. In *Advances in Engineering Design and Simulation: Select Proceedings of NIRC 2018* (pp. 33-40). Springer Singapore. [https://doi.org/10.1007/978-981-13-8468-4\\_3](https://doi.org/10.1007/978-981-13-8468-4_3)
- Richardson, D. E. (2000). Review of power cylinder friction for diesel engines. *J. Eng. Gas Turbines Power*, 122(4), 506-519. <https://doi.org/10.1115/1.1290592>
- Shariyat, M. (2012). Nonlinear transient stress and wave propagation analyses of the FGM thick cylinders, employing a unified generalized thermoelasticity theory, *International Journal of Mechanical Sciences*, 65(1), 57–68. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2012.09.001>
- Shojaeefard, M. H., & Najibi, A. (2014a). Nonlinear transient heat conduction analysis of hollow thick temperature-dependent 2D-FGM cylinders with finite length using numerical method. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 28, 3825-3835. <https://doi.org/10.1007/s12206-014-0846-3>

Shojaeefard, M. H., & Najibi, A. (2014b). Nonlinear transient heat conduction analysis for a thick hollow 2D-FGM cylinder with finite length. *Arabian Journal for Science and Engineering*, 39, 9001-9014. <https://doi.org/10.1007/s13369-014-1403-1>

Timoshenko, S.P., & Goodier, J.N. (1970) *Theory of Elasticity*. McGraw-Hili, New York.

Trefethen, L.N. (2000). *Spectral Methods in Matlab*. SIAM, Philadelphia, PA.

Trung, K. N. (2021a). The temperature distribution of the wet cylinder liner of V-12 engine according to calculation and experiment. *Journal of Thermal Engineering*, 7(Supp 14), 1872-1884. <https://doi.org/10.18186/thermal.1051265>

Trung, K. N. (2021b). Effect of heat transfer correlation on wet cylinder liner temperature distribution when converting an old engine into a turbocharged engine. *Archives of Thermodynamics*, 42(3). <https://doi.org/10.24425/ather.2021.138114>

Trung, K. N., & Trong, Q. N. (2022). The Cylinder Liner Temperature Distribution Evaluation of a Diesel Engine Operating with M10, E10, and B10 Fuels. *International Journal of Heat & Technology*, 40(1). <https://doi.org/10.18280/ijht.400133>

Yamagata, H. (2005). *The science and technology of materials in automotive engines*. Elsevier.

Vignoli, L. L., Savi, M. A., Pacheco, P. M., & Kalamkarov, A. L. (2019). Comparative analysis of micromechanical models for the elastic composite laminae. *Composites Part B: Engineering*, 174, 106961. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2019.106961>

Wang, G. X., Chen, H. B., Yuan, Z. C., & Lu, W. (2012). Numerical Study on Three-Dimensional Steady-State Temperature Field of a Gasoline Engine. *Advanced Materials Research*, 569, 610-614. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMR.569.610>

Wang, X., & Stone, C. R. (2008). A study of combustion, instantaneous heat transfer, and emissions in a spark ignition engine during warm-up. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D: Journal of Automobile Engineering*, 222(4), 607-618. <https://doi.org/10.1243/09544070JAUTO610>