Kahramanmaras Sutcu Imam University

Journal of Engineering Sciences

G-Metrik Uzayda Zayıf Uyumlu Dönüşümler İçin Bazı Sabit Nokta Teoremleri

Some Fixed Point Theorems for Weak Compatible Mappings in G-Metric Spaces

Seher Sultan SEPET[1], *Cafer AYDIN*[1*]

[1] Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Kahramanmaraş, Türkiye

*Sorumlu Yazar / Corresponding Author: Cafer AYDIN ,caydin61@gmail.com

ÖZET

Bu çalışmada, G-metrik uzayda zayıf uyumlu dönüşümler için bazı sabit nokta teoremleri ve sonuçlar verildi.

Anahtar Kelimeler: Sabit nokta, G -metrik uzay, zayıf uyumlu dönüşüm.

ABSTRACT

In this work it was given the existence of the unique common fixed point theorems for weakly compatible mappings and results.in G -metric spaces.

Keywords: Fixed point, G-metic spaces, weakly compatible mapping.

1. GİRİŞ

Literatürde farklı daralma şartları için bir çok sabit nokta teoremi vardır. En temel daralma şartları olarak Banach Kannan, Reich, Chatterjea, Zamfirescu, Hardy ve Rogers bilinir (Banach, 1922, Kannan 1968, Reich 1971 Chatterjea 1972, Zamfirescu 1972 ve Hardy, Rogers 1973). Bu daralma şartlarına ilaveten φ-zayıf daralma, $\delta - L$ zayıf daralma gibi daralma şartları kullanılarak bir çok sabit nokta teoremleri ispatlanmıştır (Alber, Guerre-Delabriere 1997, Rhoades 2001, Dutta Choudhury 2008, Popescu 2011, Berinde 2008, Berinde 2003, Berinde 2007, Berinde 2004). Jungck, G., zayıf uyumlu dönüşümü tanımladı (Jungck, Rhoades 1998) ve bununla ilgili birçok çalışma yapıldı (Abbas ve ark., 2011, Sharma ve ark., 2011, Suzuki 2007, Vetro 2010). Z., Mustafa, B., Sims, metrik uzayı genelleştirerek G -metrik uzay olarak adlandırılan genelleştirilmiş metrik uzayı inşa ettiler (Mustafa, Sims 2006). Bunu takiple, G -metrik uzayda da farklı daralma dönüşümleri için bir çok sabit nokta teoremleri verildi.

Şimdi, bu makale boyunca kullanacağımız bazı temel tanımları verelim.

Tanım 1.1 X boş olmayan bir küme $\boldsymbol{G}: \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{X} \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu,

$(\boldsymbol{G1})\ \boldsymbol{x = y = z \Rightarrow G(x,y,z) = 0}$

$(\boldsymbol{G2})\ \boldsymbol{\forall x, y \in X, x \neq y}$ ***için*** $\boldsymbol{0 < G(x,x,y)}$

$(G3)\ \forall x,y,z \in X, y \neq z$ *için* $G(x,x,y) \leq G(x,y,z)$

$(G4)\ G(x,y,z) = G(x,z,y) = G(y,z,x) = \cdots$ (simetri)

$(G5)\ \forall x,y,z,a \in X$ *için* $G(x,y,z \leq G(x,a,a) + G(a,y,z)$ (dikdörtgen eşitsizliği)

özelliklerini sağlasın. Bu taktirde G fonksiyonuna genelleştirilmiş metrik veya daha özel olarak X üzerinde bir G -metrik ve (X,G) çiftine de G-metrik uzay denir (Mustafa, Sims 2006).

Tanım 1.2 (X, G) bir G -metrik uzay olsun. X deki (x_n) dizisi $x \in X$ noktasına G -yakınsak ise $x \in X$ noktasına (x_n) dizisinin limiti denir. Diğer bir deyişle G -metriğinde $x_n \to x$ ise$\forall \varepsilon > 0$için bir $n_0 \in N$ vardır öyle ki $\forall n, m \geq n_0$ için $G(x, x_n, x_m) < \varepsilon$ dur (Mustafa, Sims 2006).

Önerme 1.3 (X, G), G -metrik uzay olsun. Bu taktirde; X deki (x_n) dizisi ve $x \in X$ noktası için aşağıdakiler denktir (Mustafa, Sims 2006).

(1) (x_n) , x e G -yakınsaktır.

(2) $G(x_n, x_n, x) \to 0$, $(n \to \infty)$
(3) $G(x_n, x, x) \to 0$, $(n \to \infty)$

(4) $G(x_m, x_n, x) \to 0$, $(n \to \infty)$

Tanım 1.4 (X, G) bir G -metrik uzay ve (x_n) bu uzayda bir dizi olsun. Verilen herhangi bir $\varepsilon > 0$ için $n, m, l \geq n_0$ olduğunda $G(x_n, x_m, x_l) < \varepsilon$olacak şekilde $n_0 \in N$ sayısı var ise (x_n) dizisine G -Cauchy dizisi denir (Mustafa, Sims 2006).

Önerme 1.5 (X, G) , G -metrik uzay olsun. Bu taktirde; X deki (x_n) dizisi *ve* $x \in X$ noktası için aşağıdakiler denktir (Mustafa, Sims 2006).
(1) (x_n) dizisi G -Cauchy dizisidir.
(2) Her $\varepsilon > 0$ için $n_0 \in N$ vardır öyle ki; $\forall n, m \geq n_0$ için $G(x_n, x_m, x_m) < \varepsilon$.

Tanım 1.6 (X, G) ve (X', G') iki metrik uzay, , $f: X \to X$ bir fonksiyon ve $x, y \in X$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $G(a, x, y) < \delta$ iken $G'(f(a), (x), (y)) < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta > 0$ var ise f fonksiyonuna $a \in X$ noktasında G -süreklidir denir. f fonksiyonunun X de G –sürekli olması için gerek ve yeter şart X in her bir noktasında G -sürekli olmasıdır (Mustafa, Sims 2006).

2. TEMEL SONUÇLAR

Abbas ve ark. genelleştirilmiş (B) şartını sağlayan $F, f: X \to X$ dönüşümleri için ortak tek sabit noktanın var olduğunu gösterdi (Abbas ve ark, 2011). Anchalee Kaewcharoen ve Yuying kısmi metrik uzayda zayıf uyumlu dönüşümler yardımıyla dört dönüşüm için ortak tek sabit noktanın var olduğunu gösterdi (Kaewcharoen, Yuying 2014). Bizde bu çalışmamızda G-metrik uzayda zayıf uyumlu dönüşümler yardımıyla dört dönüşüm için ortak tek sabit noktanın var olduğunu göstereceğiz.

Tanım 2.1 (X, G) bir G -metrik uzay olsun. $\forall x, y \in X$ için,

$$M(x, y, y) = \max\left\{G(fx, fy, fy), G(fx, Fx, Fx), G(fy, Fy, Fy), \frac{1}{2}[G(fx, Fy, Fy) + G(fy, Fx, Fx)]\right\}$$

olmak üzere;

$$G(Fx, Fy, Fy) \leq \delta\, M(x, y, y) + L \min\{G(fx, Fx, Fx), G(fy, Fy, Fy), G(fx, Fy, Fy), G(fy, Fx, Fx)\} \quad (2.1)$$

olacak şekilde $\delta \in [0, 1)$ ve $L \geq 0$ var ise $F, f: X \to X$ dönüşümü genelleştirilmiş (B) durumunu sağlar.

Tanım 2.2 $f, g : X \to X$ tanımlı iki dönüşüm olsun. $f(x) = g(x) = w$ olacak şekilde $x, w \in X$ noktaları varsa x noktasına f ve g dönüşümlerinin çakışma noktası denir (Jungck, 1976).

Tanım 2.3 $f, g : X \to X$ birer dönüşüm olsun. Eğer f ve g çakışık noktalarında değişmeli ise f ve g ye zayıf uyumlu dönüşümler denir. Yani bazı $x \in X$ için $f(x) = g(x)$ ise bu taktirde $fgx = gfx$ tir (Jungck, Rhoades 1998).

Teorem 2.1. (X, G) bir G –tam metrik uzay olsun. X üzerinde f, s, F ve S dönüşümleri aşağıdaki şartları sağlasın.

(a) $f(X) \subseteq s(X)$ ve $F(X) \subseteq S(X)$

(b) $\forall x, y \in X$ için,

$$M(x, y, y) = \max\left\{G(sx, Sy, Sy), G(sx, Fx, Fx), G(Sy, fy, fy), \frac{1}{2}[G(sx, fy, fy) + G(Sy, Fx, Fx)]\right\}$$

olmak üzere;

$$G(Fx,fy,fy) \leq \delta\, M(x,y,y) + L\min\{G(sx,Fx,Fx),G(Sy,fy,fy),G(sx,fy,fy),G(Sy,Fx,Fx)\} \tag{2.2}$$

olacak şekilde $\delta \in [0,\frac{1}{2})$ ve $L \geq 0$ vardır.

(c) $f(X)$ veya $s(X)$ kapalıdır.

Bu taktirde $\{f,S\}$ ve $\{s,F\}$ zayıf uyumlu ise f,s,F ve S X de tek ortak sabit noktaya sahiptir.

İspat: x_0 , X de keyfi bir nokta olsun. $f(X) \subseteq s(X)$ ve $F(X) \subseteq S(X)$ olduğundan . $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için,

$$y_n = Fx_n = Sx_{n+1} \quad \text{ve} \quad y_{n+1} = fx_{n+1} = sx_{n+2}$$

olacak şekilde X de bir (y_n) dizisi inşa edebiliriz. (2.2) yi kullanarak

$$G(Fx_n,fx_{n+1},fx_{n+1}) \leq \delta M(x_n,x_{n+1},x_{n+1})$$
$$+L\min\{G(sx_n,Fx_n,Fx_n),G(Sx_{n+1},fx_{n+1},fx_{n+1}),G(sx_n,fx_{n+1},fx_{n+1}),G(Sx_{n+1},Fx_n,Fx_n)\}$$

$$M(x_n,x_{n+1},x_{n+1}) \quad = \max\left\{\begin{matrix} G(sx_n,Sx_{n+1},Sx_{n+1}),G(sx_n,Fx_n,Fx_n),G(Sx_{n+1},fx_{n+1},fx_{n+1}), \\ \frac{1}{2}[G(sx_n,fx_{n+1},fx_{n+1}) + G(Sx_{n+1},Fx_n,Fx_n)] \end{matrix}\right\}$$

olduğundan burada,

$$M(x_n,x_{n+1},x_{n+1}) = \max\left\{\begin{matrix} G(y_{n-1},y_n,y_n),G(y_{n-1},y_n,y_n),G(y_n,y_{n+1},y_{n+1}), \\ \frac{1}{2}[G(y_{n-1},y_{n+1},y_{n+1}) + G(y_n,y_n,y_n)] \end{matrix}\right\}$$
$$= \max\{G(y_{n-1},y_n,y_n),G(y_n,y_{n+1},y_{n+1})\}$$

ve

$$\min\{G(y_{n-1},y_n,y_n),G(y_n,y_{n+1},y_{n+1}),G(y_{n-1},y_{n+1},y_{n+1}),G(y_n,y_n,y_n)\} = G(y_n,y_n,y_n) = 0$$

olduğundan

$$G(y_n,y_{n+1},y_{n+1}) \leq \delta \max\{G(y_{n-1},y_n,y_n),G(y_n,y_{n+1},y_{n+1})\}$$

olur. Bu taktirde iki durum söz konusudur.

1.Durum:

$$\max\{G(y_{n-1},y_n,y_n),G(y_n,y_{n+1},y_{n+1})\} = G(y_n,y_{n+1},y_{n+1})$$

olsun. Burada

$$G(y_n,y_{n+1},y_{n+1}) \leq \delta G(y_n,y_{n+1},y_{n+1})$$

olup $\delta \in [0,\frac{1}{2})$ olduğundan

$$G(y_n,y_{n+1},y_{n+1}) = 0$$

olur.

2. Durum:

$$\max\{G(y_{n-1},y_n,y_n),G(y_n,y_{n+1},y_{n+1})\} = G(y_{n-1},y_n,y_n)$$

olsun. Bu taktirde;

$$G(y_n,y_{n+1},y_{n+1}) \leq \delta\, G(y_{n-1},y_n,y_n)$$

$$\leq \delta\left(\delta G(y_{n-2}, y_{n-1}, y_{n-1})\right)$$
$$\vdots$$
$$\leq \delta^n G(y_0, y_1, y_1)$$

elde ederiz.

Şimdi (y_n) dizisinin G-Cauchy dizisi olduğunu gösterelim.$\forall\, n \in \mathbb{N}$ için $n < m$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} G(y_n, y_m, y_m) &\leq G(y_n, y_{n+1}, y_{n+1}) + G(y_{n+1}, y_{n+2}, y_{n+2}) + \cdots + G(y_{m-1}, y_m, y_m) \\ &\leq (\delta^n + \delta^{n+1} + \cdots + \delta^{m-1}) G(y_0, y_1, y_1) \\ &= \delta^n \left(\frac{1-\delta^{m-n}}{1-\delta}\right) G(y_0, y_1, y_1) \\ &\leq \frac{\delta^n}{1-\delta} G(y_0, y_1, y_1) \end{aligned}$$

$n, m \to \infty$ için limit alınırsa $G(y_n, y_m, y_m) \to 0$ olur. O halde (y_n) bir G-Cauchy dizisidir. (X, G), G-tam olduğundan bazı $z \in X$ için $\lim_{n\to\infty} y_n = z$ dir.

$s(X)$ veya $f(X)$kapalı olduğundan $s(X)$ in kapalı olduğunu farzedelim. Bu taktirde bir $u \in X$ vardır öyle ki $z = su$ dur. Dikdörtgen eşitsizliğinden;

$$\begin{aligned} G(z, z, Fu) = G(Fu, z, z) &\leq G(Fu, y_{n+1}, y_{n+1}) + G(y_{n+1}, z, z) \\ &= G(y_{n+1}, z, z) + G(Fu, fx_{n+1}, fx_{n+1}) \end{aligned}$$

elde edilir. (2.2) den

$$\begin{aligned} G(Fu, z, z) &\leq G(y_{n+1}, z, z) \\ &+\delta \max\left\{\begin{matrix} G(su, Sx_{n+1}, Sx_{n+1}), G(su, Fu, Fu), G(Sx_{n+1}, fx_{n+1}, fx_{n+1}), \\ \frac{1}{2}[G(su, fx_{n+1}, fx_{n+1}) + G(Sx_{n+1}, Fu, Fu)] \end{matrix}\right\} \\ &+ \mathrm{L}\min\{G(su, Fu, Fu), G(Sx_{n+1}, fx_{n+1}, fx_{n+1}), G(su, fx_{n+1}, fx_{n+1}), G(Sx_{n+1}, Fu, Fu)\} \end{aligned}$$

elde edilir. $y_n = Sx_{n+1}$, $y_{n+1} = fx_{n+1}$ ve $su = z$ eşitliklerini kullanarak, $n \to \infty$ için limite geçilirse

$$\begin{aligned} G(Fu, z, z) \leq G(z, z, z) + \delta \max&\left\{G(z, z, z), G(z, Fu, Fu), G(z, z, z), \frac{1}{2}[G(z, z, z) + G(z, Fu, Fu)]\right\} \\ &+L \min\{G(z, Fu, Fu), G(z, z, z), G(z, z, z), G(z, Fu, Fu)\} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan da

$$\begin{aligned} G(Fu, z, z) &\leq \delta G(Fu, Fu, z) \\ &\leq \delta[G(Fu, z, z) + G(z, z, Fu)] \\ &= 2\delta G(z, z, Fu) \end{aligned}$$

elde edilir. $\delta \in [0, \frac{1}{2})$ olduğundan;

$$G(Fu, z, z) = 0 \text{ ve dolayısıyla } Fu = z$$

olur. Bu taktirde;

$$su = Fu = z$$

elde edilir. F ve s zayıf uyumlu olduğundan $sFu = Fsu$ dur. Bu taktirde $Fz = sz$ olur. $F(X) \subseteq S(X)$ olduğundan bir $v \in X$ vardır öyle ki, $z = Sv$ dir. (2.2) yi kullanarak;

$$G(z,fv,fv) = G(Fu,fv,fv) \leq \delta \max\left\{G(su,Sv,Sv), G(su,Fu,Fu), G(Sv,fv,fv), \frac{1}{2}[G(su,fv,fv) + G(Sv,Fu,Fu)]\right\}$$
$$+ L \min\{G(su,Fu,Fu), G(Sv,fv,fv), G(su,fv,fv), G(Sv,Fu,Fu)\}$$

$$G(z,fv,fv) \leq \delta G(z,fv,fv)$$

elde edilir. $\delta \in [0,\frac{1}{2})$ olduğundan

$$G(z,fv,fv) = 0$$

dolayısıyla

$$fv = z$$

olur. Böylece;

$$Sv = fv = z$$

S ve f zayıf uyumlu olduğundan $fSv = Sfv$ dir. Buradan $fz = Sz$ olur.

Şimdi F, S, s ve f nin ortak bir sabit noktası olduğunu gösterelim. (2.2) den

$$G(Fz,z,z) = G(Fz,fv,fv) \leq \delta \max\left\{G(sz,Sv,Sv), G(sz,Fz,Fz), G(Sv,fv,fv), \tfrac{1}{2}[G(sz,fv,fv) + G(Sv,Fz,Fz)]\right\}$$
$$+ L \min\{G(sz,Fz,Fz), G(Sv,fv,fv), G(sz,fv,fv), G(Sv,Fz,Fz)\}$$

$$G(Fz,z,z) \leq \delta \max\left\{G(Fz,z,z), \frac{1}{2}[G(Fz,z,z) + G(z,Fz,Fz)]\right\}$$

elde edilir. Burada iki durum vardır.

1.Durum:

$$\max\left\{G(Fz,z,z), \frac{1}{2}[G(Fz,z,z) + G(z,Fz,Fz)]\right\} = G(Fz,z,z)$$

olsun. Böylece;

$$G(Fz,z,z) \leq \delta G(Fz,z,z)$$

elde edilir. $\delta \in [0,\frac{1}{2})$ olduğu hatırlanırsa;

$G(Fz,z,z) = 0$ ve dolayısıyla $Fz = z$ olur.

2.Durum:

$$\max\left\{G(Fz,z,z), \frac{1}{2}[G(Fz,z,z) + G(z,Fz,Fz)]\right\} = \frac{1}{2}[G(Fz,z,z) + G(z,Fz,Fz)]$$

olsun. Dikdörtgen eşitsizliğinden;

$$G(Fz,z,z) \leq \frac{\delta}{2}[G(Fz,z,z) + G(Fz,z,z) + G(Fz,z,z)]$$
$$= \frac{3\delta}{2} G(Fz,z,z)$$

elde edilir. $\delta \in [0,\frac{1}{2})$ olduğundan;

$G(Fz,z,z) = 0$ ve dolayısıyla $Fz = sz = z$ olur. z, F ve s nin ortak bir sabit noktasıdır.

Şimdi S ve f nin de ortak bir sabit noktası olduğunu gösterelim. (2.2) yi kullanarak

$$G(z,fz,fz) = G(Fz,fz,fz) \leq \delta \max\left\{G(sz,Sz,Sz), G(sz,Fz,Fz), G(Sz,fz,fz), \tfrac{1}{2}[G(sz,fz,fz) + G(Sz,Fz,Fz)]\right\}$$
$$+ L \min\{G(sz,Fz,Fz), G(Sz,fz,fz), G(sz,fz,fz), G(Sz,Fz,Fz)\}$$

$$G(z,fz,fz) \le \delta \max\left\{G(z,fz,fz), \frac{1}{2}[G(z,fz,fz) + G(fz,z,z)]\right\}$$

elde edilir. Burada iki durum vardır.

1.Durum:

$$\max\left\{G(z,fz,fz), \frac{1}{2}[G(z,fz,fz) + G(fz,z,z)]\right\} = G(z,fz,fz)$$

olsun. Böylece;

$$G(z,fz,fz) \le \delta G(z,fz,fz)$$

elde edilir. $\delta \in [0,\frac{1}{2})$ olduğu hatırlanırsa;

$G(z,fz,fz) = 0$ ve dolayısıyla $fz = z$ olur.

2.Durum:

$$\max\left\{G(z,fz,fz), \frac{1}{2}[G(z,fz,fz) + G(fz,z,z)]\right\} = \frac{1}{2}[G(z,fz,fz) + G(fz,z,z)]$$

olsun. Dikdörtgen eşitsizliğinden;

$$\begin{aligned} G(z,fz,fz) &\le \frac{\delta}{2}[G(z,fz,fz) + G(z,fz,fz) + G(fz,fz,z)] \\ &= \frac{3\delta}{2} G(z,fz,fz) \end{aligned}$$

elde edilir. $\delta \in [0,\frac{1}{2})$ olduğundan;

$G(z,fz,fz) = 0$ ve dolayısıyla $fz = Sz = z$

olur. z, f ve S nin de ortak bir sabit noktasıdır.

Şimdi F, S, s ve f nin tek ortak sabit noktası olduğunu gösterelim. $z \ne w$ olacak şekide bir diğer sabit noktası olduğunu kabul edelim. Bu taktirde (2.2) yi kullanarak;

$$\begin{aligned} G(z,w,w) &= G(Fz,fw,fw) \\ &\le \delta \max\left\{G(sz,Sw,Sw), G(sz,Fz,Fz), G(Sw,fw,fw), \frac{1}{2}[G(sz,fw,fw) + G(Sw,Fz,Fz)]\right\} \\ &+ L\min\{G(sz,Fz,Fz), G(Sw,fw,fw), G(sz,fw,fw), G(Sw,Fz,Fz)\} \end{aligned}$$

$$G(z,w,w) \le \delta \max\left\{G(z,w,w), \frac{1}{2}[G(z,w,w) + G(w,z,z)]\right\}$$

elde edilir. Burada iki durum vardır.

1.Durum:

$$\max\left\{G(z,w,w), \frac{1}{2}[G(z,w,w) + G(w,z,z)]\right\} = G(z,w,w)$$

olsun. Böylece

$$G(z,w,w) \le \delta G(z,w,w)$$

elde edilir. $\delta \in [0,\frac{1}{2})$ olduğundan;

$G(z,w,w) = 0$ ve dolayısıyla $z = w$ olur.

2.Durum:

$$\max\left\{G(z,w,w), \frac{1}{2}[G(z,w,w) + G(w,z,z)]\right\} = \frac{1}{2}[G(z,w,w) + G(w,z,z)]$$

olsun. Dikdörtgen eşitsizliğinden;

$$G(z,w,w) \leq \frac{\delta}{2}[G(z,w,w) + G(z,w,w) + G(w,w,z)]$$
$$= \frac{3\delta}{2} G(z,w,w)$$

elde edilir. $\delta \in [0,\frac{1}{2})$ olduğundan;

$G(z,w,w) = 0$ ve dolayısıyla $z = w$ elde edilir. Bu taktirde z, F, S, s ve f nin tek ortak sabit noktasıdır.

Sonuç 2.1. (X,G) bir G -metrik uzay olsun. $f, s : X \to X$ aşağıdaki şartları sağlayan dönüşüm olsun.

(a)$f(X) \subseteq s(X)$

(b) $\forall x, y \in X$ için

$$M(x,y,y) = \max\left\{G(sx,sy,sy), G(sx,fx,fx), G(sy,fy,fy), \frac{1}{2}[G(sx,fy,fy) + G(sy,fx,fx)]\right\}$$

olmak üzere;

$$G(fx,fy,fy) \leq \delta\, M(x,y,y) + L \min\{G(sx,fx,fx), G(sy,fy,fy), G(sx,fy,fy), G(sy,fx,fx)\} \quad (2.3)$$

olacak şekilde $\delta \in [0,\frac{1}{2})$ ve $L \geq 0$ vardır.

(c) $f(X)$ veya $s(X)$ kapalıdır.

Bu taktirde $\{f, S\}$ zayıf uyumlu ise f ve s X de tek ortak sabit noktaya sahiptir.

Teorem 2.2. (X,G) bir G –tam metrik uzay olsun. X üzerinde f, s, F ve S dönüşümleri aşağıdaki şartları sağlasın.

(a)$f(X) \subseteq s(X)$ ve $F(X) \subseteq S(X)$

(b) $\forall x, y \in X$ için,

$$M(x,y,y) = \max\{G(sx,Sy,Sy), G(sx,Fx,Fx), G(Sy,fy,fy), G(sx,fy,fy), G(Sy,Fx,Fx)\}$$

olmak üzere;

$$G(Fx,fy,fy) \leq \delta\, M(x,y,y) + L \min\{G(sx,Fx,Fx), G(Sy,fy,fy), G(sx,fy,fy), G(Sy,Fx,Fx)\} \quad (2.4)$$

olacak şekilde $\delta \in [0,\frac{1}{2})$ ve $L \geq 0$ vardır.

(c) $f(X)$ veya $s(X)$ kapalıdır.

Bu taktirde $\{f, S\}$ ve $\{s, F\}$ zayıf uyumlu ise f, s, F ve S X de tek ortak sabit noktaya sahiptir.

İspat:

x_0 , X de keyfi bir nokta olsun. $f(X) \subseteq s(X)$ ve $F(X) \subseteq S(X)$ olduğundan . $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için,

$y_n = Fx_n = Sx_{n+1}$ ve $y_{n+1} = fx_{n+1} = sx_{n+2}$

olacak şekilde X de bir (y_n) dizisi inşa edebiliriz. (2.4) yi kullanarak

$$G(Fx_n, fx_{n+1}, fx_{n+1}) \leq \delta M(x_n, x_{n+1}, x_{n+1})$$
$$+L \min\{G(sx_n, Fx_n, Fx_n), G(Sx_{n+1}, fx_{n+1}, fx_{n+1}), G(sx_n, fx_{n+1}, fx_{n+1}), G(Sx_{n+1}, Fx_n, Fx_n)\}$$

$$M(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) = \max\begin{Bmatrix} G(sx_n, Sx_{n+1}, Sx_{n+1}), G(sx_n, Fx_n, Fx_n), G(Sx_{n+1}, fx_{n+1}, fx_{n+1}), \\ G(sx_n, fx_{n+1}, fx_{n+1}), G(Sx_{n+1}, Fx_n, Fx_n) \end{Bmatrix}$$

elde edilir. Buradan;

$$M(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) = \max\{G(y_{n-1}, y_n, y_n), G(y_{n-1}, y_n, y_n), G(y_n, y_{n+1}, y_{n+1}), G(y_{n-1}, y_{n+1}, y_{n+1}), G(y_n, y_n, y_n)\}$$

$$= \max\{G(y_{n-1}, y_n, y_n), G(y_n, y_{n+1}, y_{n+1}), G(y_{n-1}, y_{n+1}, y_{n+1})\}$$

ve

$$\min\{G(y_{n-1}, y_n, y_n), G(y_n, y_{n+1}, y_{n+1}), G(y_{n-1}, y_{n+1}, y_{n+1}), G(y_n, y_n, y_n)\} = G(y_n, y_n, y_n) = 0$$

olduğundan

$$G(y_n, y_{n+1}, y_{n+1}) \leq \delta \max\{G(y_{n-1}, y_n, y_n), G(y_n, y_{n+1}, y_{n+1}), G(y_{n-1}, y_{n+1}, y_{n+1})\}$$

elde edilir. Bu taktirde üç durum söz konusudur.

1.Durum:

$$\max\{G(y_{n-1}, y_n, y_n), G(y_n, y_{n+1}, y_{n+1}), G(y_{n-1}, y_{n+1}, y_{n+1})\} = G(y_n, y_{n+1}, y_{n+1})$$

olsun. Burada

$$G(y_n, y_{n+1}, y_{n+1}) \leq \delta G(y_n, y_{n+1}, y_{n+1})$$

olup $\delta \in [0, \frac{1}{2})$ olduğundan

$$G(y_n, y_{n+1}, y_{n+1}) = 0$$

olur.

2.Durum:

$$\max\{G(y_{n-1}, y_n, y_n), G(y_n, y_{n+1}, y_{n+1}), G(y_{n-1}, y_{n+1}, y_{n+1})\} = G(y_{n-1}, y_{n+1}, y_{n+1})$$

olsun. Bu taktirde;

$$\begin{aligned} G(y_n, y_{n+1}, y_{n+1}) &\leq \delta[G(y_{n-1}, y_n, y_n) + G(y_n, y_{n+1}, y_{n+1})] \\ &= \frac{\delta}{1-\delta} G(y_{n-1}, y_n, y_n) \end{aligned}$$

Burada $\frac{\delta}{1-\delta} = k_1$ olsun. Burada $k_1 \in [0,1)$ ve

$$\begin{aligned} G(y_n, y_{n+1}, y_{n+1}) &\leq k_1 G(y_{n-1}, y_n, y_n) \\ &\leq k_1 \left(k_1 G(y_{n-2}, y_{n-1}, y_{n-1}) \right) \\ &\ \vdots \\ &\leq k_1{}^n G(y_0, y_1, y_1) \end{aligned}$$

elde ederiz.

3.Durum:

$$\max\{G(y_{n-1}, y_n, y_n), G(y_n, y_{n+1}, y_{n+1}), G(y_{n-1}, y_{n+1}, y_{n+1})\} = G(y_{n-1}, y_n, y_n)$$

olsun. Bu taktirde;

$$G(y_n, y_{n+1}, y_{n+1}) \leq \delta G(y_{n-1}, y_n, y_n)$$

$$\leq \delta\left(\delta G(y_{n-2}, y_{n-1}, y_{n-1})\right)$$

$$\vdots$$

$$\leq \delta^n G(y_0, y_1, y_1)$$

elde ederiz. Burada $k = \max\{\delta, k_1\}$ seçelim. O halde $k \in [0,1)$ olur.

Şimdi (y_n) dizisinin G-Cauchy dizisi olduğunu gösterelim.$\forall\, n \in N$ için $n < m$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} G(y_n, y_m, y_m) &\leq G(y_n, y_{n+1}, y_{n+1}) + G(y_{n+1}, y_{n+2}, y_{n+2}) + \cdots + G(y_{m-1}, y_m, y_m) \\ &\leq (k^n + k^{n+1} + \cdots + k^{m-1})G(y_0, y_1, y_1) \\ &= k^n\left(\frac{1-k^{m-n}}{1-k}\right)G(y_0, y_1, y_1) \\ &\leq \frac{k^n}{1-k}G(y_0, y_1, y_1) \end{aligned}$$

$n, m \to \infty$ için limit alınırsa $G(y_n, y_m, y_m) \to 0$ olur. O halde (y_n) bir G-Cauchy dizisidir. (X, G), G-tam olduğundan bazı $z \in X$ için $\lim_{n\to\infty} y_n = z$ dir.

$s(X)$ veya $f(X)$kapalı olduğundan $s(X)$ in kapalı olduğunu farzedelim. Bu taktirde bir $u \in X$ vardır öyle ki $z = su$ dur. Dikdörtgen eşitsizliğinden;

$$\begin{aligned} G(z, z, Fu) = G(Fu, z, z) &\leq G(Fu, y_{n+1}, y_{n+1}) + G(y_{n+1}, z, z) \\ &= G(y_{n+1}, z, z) + G(Fu, fx_{n+1}, fx_{n+1}) \end{aligned}$$

elde edilir. (2.4) den

$$G(Fu, z, z) \leq G(y_{n+1}, z, z) + \delta \max\left\{\begin{matrix} G(su, Sx_{n+1}, Sx_{n+1}), G(su, Fu, Fu), G(Sx_{n+1}, fx_{n+1}, fx_{n+1}), \\ G(su, fx_{n+1}, fx_{n+1}), G(Sx_{n+1}, Fu, Fu) \end{matrix}\right\}$$

$$+ \text{L}\min\{G(su, Fu, Fu), G(Sx_{n+1}, fx_{n+1}, fx_{n+1}), G(su, fx_{n+1}, fx_{n+1}), G(Sx_{n+1}, Fu, Fu)\}$$

elde edilir. $y_n = Sx_{n+1}$, $y_{n+1} = fx_{n+1}$ ve $su = z$ eşitliklerini kullanarak, $n \to \infty$ için limite geçilirse

$$G(Fu, z, z) \leq G(z, z, z) + \delta \max\{G(z, z, z), G(z, Fu, Fu), G(z, z, z), G(z, z, z), G(z, Fu, Fu)\}$$

$$+L\min\{G(z, Fu, Fu), G(z, z, z), G(z, z, z), G(z, Fu, Fu)\}$$

elde edilir. Buradan da

$$\begin{aligned} G(Fu, z, z) &\leq \delta G(Fu, Fu, z) \\ &\leq \delta[G(Fu, z, z) + G(z, z, Fu)] \\ &= 2\delta G(z, z, Fu) \end{aligned}$$

elde edilir. $\delta \in [0, \frac{1}{2})$ olduğundan;

$$G(Fu, z, z) = 0 \text{ ve dolayısıyla } Fu = z$$

olur. Bu taktirde;

$$su = Fu = z$$

elde edilir.
F ve s zayıf uyumlu olduğundan $sFu = Fsu$ dur.

Bu taktirde $Fz = sz$ olur.

$F(X) \subseteq S(X)$ olduğundan bir $v \in X$ vardır öyle ki, $z = Sv$ dir. (2.4) yi kullanarak;

$$G(z, fv, fv) = G(Fu, fv, fv) \leq \delta \max\{G(su, Sv, Sv), G(su, Fu, Fu), G(Sv, fv, fv), G(su, fv, fv), G(Sv, Fu, Fu)\}$$
$$+ L \min\{G(su, Fu, Fu), G(Sv, fv, fv), G(su, fv, fv), G(Sv, Fu, Fu)\}$$

$$G(z, fv, fv) \leq \delta G(z, fv, fv)$$

elde edilir. $\delta \in [0, \frac{1}{2})$ olduğundan

$$G(z, fv, fv) = 0 \text{ ve dolayısıyla } fv = z$$

olur. Böylece;

$$Sv = fv = z$$

elde edilir. S ve f zayıf uyumlu olduğundan $fSv = Sfv$ dir. Buradan $fz = Sz$ olur.

Şimdi F, S, s ve f nin ortak bir sabit noktası olduğunu gösterelim. (2.4) den

$$G(Fz, z, z) = G(Fz, fv, fv) \leq \delta \max\{G(sz, Sv, Sv), G(sz, Fz, Fz), G(Sv, fv, fv), G(sz, fv, fv), G(Sv, Fz, Fz)\} +$$
$$L \min\{G(sz, Fz, Fz), G(Sv, fv, fv), G(sz, fv, fv), G(Sv, Fz, Fz)\}$$

$$G(Fz, z, z) \leq \delta \max\{G(Fz, z, z), G(z, Fz, Fz)\}$$

elde edilir. Burada iki durum vardır.

1.Durum:

$$\max\{G(Fz, z, z), G(z, Fz, Fz)\} = G(Fz, Fz, z)$$

olsun. Böylece;

$$\begin{aligned} G(Fz, z, z) &\leq \delta G(Fz, Fz, z) \\ &\leq \delta[G(Fz, z, z) + G(Fz, z, z)] \\ &= 2\delta G(Fz, z, z) \end{aligned}$$

elde edilir. $\delta \in [0, \frac{1}{2})$ olduğu hatırlanırsa;

$G(Fz, z, z) = 0$ ve dolayısıyla $Fz = z$ olur.

2.Durum:

$$\max\{G(Fz, z, z), G(z, Fz, Fz)\} = G(Fz, z, z)$$

olsun.

$$G(Fz, z, z) \leq \delta G(Fz, z, z)$$

elde edilir. $\delta \in [0, \frac{1}{2})$ olduğundan;

$G(Fz, z, z) = 0$ ve dolayısıyla $Fz = sz = z$ olur. Şu halde z, F ve s nin ortak bir sabit noktasıdır.

Şimdi S ve f nin de ortak bir sabit noktası olduğunu gösterelim. (2.4) ü kullanarak

$$G(z, fz, fz) = G(Fz, fz, fz) \leq \delta \max\{G(sz, Sz, Sz), G(sz, Fz, Fz), G(Sz, fz, fz), G(sz, fz, fz), G(Sz, Fz, Fz)\}$$
$$+ L \min\{G(sz, Fz, Fz), G(Sz, fz, fz), G(sz, fz, fz), G(Sz, Fz, Fz)\}$$

buradan;

$$G(z, fz, fz) \leq \delta \max\{G(z, fz, fz), G(fz, z, z)\}$$

elde edilir. Burada iki durum vardır.

1.Durum:

$$\max\{G(z, fz, fz), G(fz, z, z)\} = G(z, fz, fz)$$

olsun. Böylece;

$$G(z, fz, fz) \leq \delta G(z, fz, fz)$$

elde edilir. $\delta \in [0, \frac{1}{2})$ olduğu hatırlanırsa;

$G(z, fz, fz) = 0$ ve dolayısıyla $fz = z$ olur.

2.Durum:

$$\max\{G(z, fz, fz), G(fz, z, z)\} = G(z, z, fz)$$

olsun. Dikdörtgen eşitsizliğinden;

$$\begin{aligned} G(z, fz, fz) &\leq \delta G(z, z, fz) \\ &\leq \delta[G(z, fz, fz) + G(z, fz, fz)] \\ &= 2\delta G(z, fz, fz) \end{aligned}$$

elde edilir. $\delta \in [0, \frac{1}{2})$ olduğu hatırlanırsa;

$G(z, fz, fz) = 0$ ve dolayısıyla $fz = Sz = z$ olur. z, f ve S nin de ortak bir sabit noktasıdır.

Şimdi F, S, s ve f nin tek ortak sabit noktası olduğunu gösterelim. $z \neq w$ olacak şekide bir diğer sabit noktası olduğunu kabul edelim. Bu taktirde (2.4) yi kullanarak;

$$G(z, w, w) = G(Fz, fw, fw) \leq \delta \max\{G(sz, Sw, Sw), G(sz, Fz, Fz), G(Sw, fw, fw), G(sz, fw, fw), G(Sw, Fz, Fz)\}$$
$$+L \min\{G(sz, Fz, Fz), G(Sw, fw, fw), G(sz, fw, fw), G(Sw, Fz, Fz)\}$$

$$G(z, w, w) \leq \delta \max\{G(z, w, w), G(w, z, z)\}$$

elde edilir. Burada iki durum vardır.

1.Durum:

$$\max\{G(z, w, w), G(w, z, z)\} = G(z, w, w)$$

olsun. Böylece

$$G(z, w, w) \leq \delta G(z, w, w)$$

elde edilir. $\delta \in [0, \frac{1}{2})$ olduğundan;

$G(z, w, w) = 0$ ve dolayısıyla $z = w$ olur.

2.Durum:

$$\max\{G(z, w, w), G(w, z, z)\} = G(z, z, w)$$

olsun. Böylece

$$\begin{aligned} G(z, w, w) &\leq \delta[G(z, w, w) + G(z, w, w)] \\ &= 2\delta G(z, w, w) \end{aligned}$$

elde edilir. $\delta \in [0,\frac{1}{2})$ olduğundan, $G(z,w,w) = 0$ ve dolayısıyla $z = w$ elde edilir. Bu taktirde z, F, S, s ve f nin tek ortak sabit noktasıdır.

Sonuç 2.2. (X,G) bir G -metrik uzay olsun. $f, s : X \to X$ aşağıdaki şartları sağlayan dönüşüm olsun.

(a)$f(X) \subseteq s(X)$

(b) $\forall x, y \in X$ için

$$M(x,y,y) = \max\{G(sx,sy,sy), G(sx,fx,fx), G(sy,fy,fy), G(sx,fy,fy), G(sy,fx,fx)\}$$

olmak üzere;

$$G(fx,fy,fy) \leq \delta\, M(x,y,y) + L \min\{G(sx,fx,fx), G(sy,fy,fy), G(sx,fy,fy), G(sy,fx,fx)\} \quad (2.5)$$

olacak şekilde $\delta \in [0,\frac{1}{2})$ ve $L \geq 0$ vardır.

(c) $f(X)$ veya $s(X)$ kapalıdır.

Bu taktirde $\{f,S\}$ zayıf uyumlu ise f ve s X de tek ortak sabit noktaya sahiptir.

3. KAYNAKLAR

Abbas, M., Babu G.V.R., and Alemayehu, G.N., (2011). On common fixed points of weakly compatible mappings satisfying generalized condition, Filomat., 25, 9-19.

Alber, Ya., I., Guerre-Delabriere, S., (1997). Principles of weakly contractive maps in Hilbert Spaces, in I., Gohberg, Yu., Lyubich (Eds.), New Results in Operator Theory, in Advences and Appl., 7-22, 98.

Banach, S., (1922). Surles operations dansles ensembles abstracits et leur application aux equations integrales, Fund Math. 000003,133-181.

Berinde, V., (2003). On the approximatation of weak contractive mappings. Carpathian J., Math., 19, (1), 7-22.

Berinde, V., (2004). Approximatating fixed points of weak contractions using the Picard iteration. Nonlinear Anal. Forum 9, (1), 43-57.

Berinde, V., (2007). Approximatating of fixed points. Springer- Verlag. Berlin-Heidelberg.

Berinde, V., (2008). General constructive fixed point theorems for Ciric-type almost contractions in metric spaces, Carpathian J., 24, no. 2, 10-19.

Chatterjea, S. K., (1972). Fixed point theorems. C. R., Acad., Bulg. Sci., 25, 727-730.

Dutta, P. N., Choudhury, B. S., (2008). A generalization of contraction principle in metric spaces. Fixed point Theory and Applications Article, I. D., 8, 406368.

Hardy G. E., Rogers, T.D., (1973). A generalization of a fixed point theorem of Reich, Canad. Math. Bull., 16, 201-206.

Jungck, G., (1976). Commuting Mappings and Fixed Points, Amer. Math. Monthly, 83: 261-263.

Jungck, G., Rhoades, B. E., (1998). Fixed Point for Set Valued Functionons without Continuity, Indian J., Pure Applied Math., 29 (3), 227-238.

Kaewcharoen A., Yuying T., (2014). Unique common fixed point theorems on partial metric spaces, J., of nonlinear Sci. and Appl. , 7, 90-101.

Kannan, R.,, (1968). Some results on fixed points. Bull. Calcutta Math. Soc., 60, 71-76.

Mustafa, Z., Sims, B., (2006). A new approach to a generalized metric spaces. J., Nonlinear Convex Anal., 7 (2), 289-297.

Popescu, O., (2011). Fixed points for $\psi, \varphi -$ weak contractions. Appl., Math., Lett. , 1-4, 24.

Reich, S., (1971). Some remarks concerning contraction mappings. Can., Math., Bull., 14, 121-124.

Rhoades, B. E., (2001). Some theorems on weakly contractive maps, Nonlinear Anal. 47, (4), 2683-2693.

Sushil Sharma, Bhavana Deshpande , and Alok Pandey, (2011). Common fixed point theorem for a pair of weakly compatible mappings on Banach spaces, East Asian Math., J. 27, (5), 573-583.

Suzuki, T., (2007). Meir-Keeler contractions of integral type are still Meir-Keeler contractions. Internat. J., Math., Math., Sci., Article ID 39281, 6 pages, MR2285999 (2007k:54049).

Vetro, C., (2010). On Branciari's theorem for weakly compatible mappings, Appl., Math., Lett., MR2609801 (2011 d: 47136)., 23, (6), 700–705.

Zamfirescu T., (1972). Fixed point theorems in metric spaces, Arch., Math., (Basel) 23, 292-298.